А. В. Тарасенко

Самарский государственный технический университет,
Tarasenko.A.V@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\left\{\begin{array}{l} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u = 0 \quad (y > 0), \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0 \quad (y < 0), \end{array}\right. \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$ от функции $u(x,y)$:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y} u\right)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u(x,t)\,dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0),$$

a – вещественная постоянная, $m > 2$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками уравнения (1) $AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ и $BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ в полуплоскости $y < 0$.

Задача. *Найти решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1) *в области* Ω *при* $y \neq 0$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\begin{gathered} A(x)\left(I^{\alpha_1,\beta_1,\eta_1}_{0+} w(t) u[\Theta_0(t)]\right)(x) + B(x)\left(I^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}_{1-} \delta(t) u[\Theta_1(t)]\right)(x) + \\ + C_1(x)\left(I^{1-\beta^*-\beta}_{0+} u_y(t,0)\right)(x) + C_2(x)\left(I^{1-\beta^*-\beta}_{1-} u_y(t,0)\right)(x) + \\ + M_1(x) u_y(x,0) + M_2(x) u(x,0) = \gamma(x), \quad \forall\, x \in I, \end{gathered} \tag{2}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y), \quad \forall\, x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y), \quad \forall\, x \in I,$$

где $\varphi_i(y) \quad (i=1,2)$, $A(x)$, $B(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $\gamma(x)$ *– заданные функции, такие, что*

$$A^2(x)+B^2(x)+C_1^2(x)+C_2^2(x)+M_1^2(x)+M_2^2(x)\neq 0,$$
$$A(x),\, B(x),\, C_1(x),\, C_2(x),\, M_1(x),\, M_2(x),\, \gamma(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I),$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0, \quad y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\, y^{1-\alpha}\varphi_2(y)\in C([0,1]),$$

$\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ *– точки пересечения характеристик уравнения* (1)*, выходящих из точки* $(x,0)\in\ I$ *с характеристиками* AC *и* BC *соответственно;*

$$\beta^*=\frac{m-2a}{2(m+2)},\ \beta=\frac{m+2a}{2(m+2)},\ -1<a<1,\ 0<\beta^*<\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{1}{2},$$

где α_1, β_1, η_1, α_2, β_2, η_2 *– действительные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, которые будут указаны далее.*

Решение $u(x,y)$ поставленной задачи ищется в классе дважды дифференцируемых функций в области Ω таких, что

$$\begin{aligned}
&y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1), \quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2),\\
&y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y\in C(\Omega_1\cup\{(x,y):0<x<1, y=0\}),\\
&u_{xx}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2), \quad u_{yy}\in C(\overline{\Omega}_2).
\end{aligned}$$

Отметим, что истоком настоящей работы послужили публикации А. А. Килбаса и О. А. Репина [1, 2]. Новизна рассматриваемой задачи состоит в условии (2), которое является обобщением краевых условий подобного типа.

Вопрос существования решения задачи сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Килбас А. А., Репин О. А. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 5. – С. 638–644.

2. Килбас А. А., Репин О. А. *Аналог Трикоми для дифференциального уравнения с частными производными, содержащего уравнение диффузии дробного порядка* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т. 12. – № 1. – С. 31–39.

И. В. Трухляева

Волгоградский государственный университет,

irishka2027@mail.ru

О СХОДИМОСТИ “СГЛАЖЕННЫХ” ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Рассматриваются вопросы обоснования применения методов приближенного решения нелинейных уравнений эллиптического типа (на примере уравнения минимальных поверхностей) и устанавливается оценка погрешности приближения методом “сглаживания” отрезками ряда Фурье.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что задана полная ортонормированная система непрерывных